VII Jagielloński Turniej Matematyczny, Etap II

Uprzejmie informujemy, że uczestnik legitymujący się danymi:

Imię i nazwisko	Kacper Błachut
Szkoła	I Liceum Ogólnokształcące, patron: Seweryn Goszczyński, pl. Krasińskiego 1, 34-400, Nowy Targ
Klasa	Liceum Klasa 4
Miasto	Nowy Targ

wziął udział w VII JTM w etapie II. Powyższy uczestnik udzielił odpowiedzi na zadania jak przedstawia poniższa tabela.

Łączna liczba uzyskanych punktów to 10 na 10 możliwych do zdobycia.

Zapraszamy do uczestnictwa w trzecim, finałowym etapie Turnieju.

Zgodnie z regulaminem zawodów od wyniku przysługuje odwołanie, które, wraz ze stosownym uzasadnieniem, należy wysłać w formie elektronicznej na adres email: jtm@matinf.uj.edu.pl do 24.12.2023 r.

Zachęcamy również do odwiedzenia profilu facebookowego Turnieju facebook.com/JagiellonskiTurniejMatematyczny i podzielenia się na nim swoimi rozwiązaniami!

Zadanie	Treść (właściwa dla tego uczestnika)	Odp. uczestnika	Odp. poprawna
1	Niech $\mathcal{O}_\infty$ i $\mathcal{O}_\in$ będą okręgami stycznymi wewnętrznie w punkcie A o promieniach odpowiednio 224 i 280. Niech AB będzie średnicą $\mathcal{O}_\in$. Niech P_1, P_2 będą takimi punktami na okręgu $\mathcal{O}_\in$, że prosta P_1P_2 jest styczną do okręgu $\mathcal{O}_\infty$ w punkcie przecięcia AB z $\mathcal{O}_\infty$ różnym od A. Niech Q_1, Q_2 będą takimi punktami na okręgu $\mathcal{O}_\in$, że prosta Q_1Q_2 jest styczną do okręgu $\mathcal{O}_\infty$ prostopadłą do stycznej P_1P_2 i leżącą po tej samej stronie AB, co P_1, przy czym Q_1 jest po tej samej stronie P_1P_2, co A. Obliczyć odległość punktu styczności Q_1Q_2 z okręgiem $\mathcal{O}_\infty$ od punktu P_1.	224	224
2	Obliczyć najmniejszą wartość wyrażenia $$y^2 + \frac{y^3}{x} + \frac{x(x-y)^2}{y^2} + \frac{x^2}{y}$$ dla takich dodatnich liczb rzeczywistych x, y, że $x^3 + y^3 = 49$.	14	14

3	Niech C będzie skończonym podzbiorem zbioru nieujemnych liczb całkowitych. Załóżmy, że każdą nieujemną liczbę całkowitą n możemy przedstawić w postaci $$n = \sum_{j=k}^{l} c_j \cdot \left(\frac{977}{1021}\right)^j$$ dla pewnych $k, l \in \mathbb{Z}$ oraz $c_j \in C$. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość mocy zbioru C? Jeśli nie istnieje skończony podzbiór C o powyższych własnościach, wpisać wartość „1000”.	1021	1021
4	Zdefiniujmy działanie $\oplus$ na zbiorze dodatnich liczb wymiernych wzorem $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, gdzie liczby wymierne $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ są zapisane w postaci ułamków nieskracalnych o dodatnim liczniku i mianowniku. Dany jest rosnący ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_{157})$ dodatnich liczb wymiernych. Dla $i \in \{1, 2, \ldots, 156\}$ definujemy $b_i = a_i \oplus a_{i+1}$. Ponadto $b_{157} = a_{157} \oplus a_1$. Niech M będzie medianą zbioru $\{b_1, b_2, \ldots, b_{157}\}$. Podać sumę licznika i mianownika ułamka nieskracalnego liczby M o dodatnim mianowniku, jeśli $a_i = \frac{i}{i+95}$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, 156, 157\}$.	253	253
5	(a, b)-siatką nazwiemy nieskończoną siatkę sześciokątną, w której każda sześciokątna komórka wypełniona jest jakąś liczbą całkowitą. Liczby te zdeterminowane są przez następujący proces: W jednej z komórek w pewnym rzędzie (który nazwiemy pierwszym) znajduje się liczba 1, a w pozostałych komórkach tego rzędu oraz we wszystkich komórkach powyżej tego rzędu znajdują się zera. W każdym kolejnym rzędzie (drugim, trzecim itd.) poniżej rzędu pierwszego wartość liczby w komórce jest równa sumie wartości liczb z dwóch komórek bezpośrednio nad nią, przemnożonych odpowiednio przez a (komórka u góry po lewej) i przez b (komórka u góry po prawej).Poniższy schemat przedstawia działanie kroku 2 Wyznaczyć sumę liczb z rzędów od pierwszego do 12-tego $(3, 4)$-siatki.	2306881200	2306881200
6	Dla dodatniej liczby całkowitej n definiujemy $$s(n) = \sum_{k=1}^{n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor.$$ Wyznaczyć moc zbioru tych liczb całkowitych $n \in \{1, ..., 97343\}$, dla których wartość $s(n)$ jest parzysta. Uwaga: przez $\lfloor x \rfloor$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nieprzekraczającą x.	48515	48515
7	Parę nieuporządkowaną zbiorów $\{A, B\}$ (to znaczy, że $\{A, B\} = \{B, A\}$) nazwiemy k-kompatybilną, gdy zbiór $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ zawiera dokładnie k elementów. Wyznaczyć liczbę 7-kompatybilnych par zbiorów $\{A, B\}$ zawartych w zbiorze $\{1, 2, ..., 14\}$.	28114944	28114944

8	Podać $\lfloor 1000r \rfloor$, gdzie r jest długością promienia kuli wpisanej w ostrosłup prawidłowy czworokątny o wszystkich krawędziach długości 2567. Uwaga: przez $\lfloor x \rfloor$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nieprzekraczającą x.	664388	664388
9	Niech $a_1 = 56$ i dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ zdefiniujmy rekurencyjnie a_{n+1} jako wartość bezwzględną z różnicy liczby a_n i liczby otrzymanej przez zamianę cyfry jedności i cyfry dziesiątek liczby a_n miejscami (jeśli $a_n < 10$, to uznajemy, że a_n ma cyfrę dziesiątek równą 0; np. dla $a_n = 4$ mamy $a_{n+1} = \lvert 4 - 40 \rvert = 36$). Wyznaczyć a_{12567}.	9	9
10	Wielomian $W(x)$ posiada rzeczywiste miejsca zerowe. Poza tym $W(W(x))$ jest wielomianem czwartego stopnia o współczynniku wiodącym 474552 i jest funkcją parzystą. Wiedząc, że $W(W(0)) = 79$, wyznaczyć licznik wartości $W(0)$ wyrażonej w postaci ułamka nieskracalnego o dodatnim mianowniku.	-79	-79